



3 Differentialrechnung

3.1 Ableitungen

a) $f(x) = 2x^4 + 3 \sin x$

Summenregel $f'(x) = 8x^3 + 3 \cos x$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 + \cos x)$

Produktregel $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + \cos x) + \sqrt{x} \cdot (-\sin x)$

c) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2}$

Quotientenregel $u(x) = (x-2)^2 \Rightarrow$ Kettenregel $u'(x) = 2(x-2) \cdot 1$

$v(x) = x^2 \Rightarrow$ Faktorregel $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{2(x-2) \cdot x^2 - [(x-2)^2 \cdot 2x]}{x^4} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 8x^2 - 8x}{x^4} = \frac{4x - 8}{x^3}$$

d) $f(x) = \frac{1}{2x^3}$

$f(x) = (2x^3)^{-1} \Rightarrow$ Kettenregel $f'(x) = \underbrace{-(2x^3)^{-2}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{6x^2}_{\text{innere Abl.}} = -\frac{3}{2x^4}$

e) $s(t) = \frac{3}{4} t^{\frac{2}{3}} - 3v_0 t$

Summenregel $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} - 3v_0 = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{3}} - 3v_0$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}$

$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ Kettenregel $f'(x) = \frac{1}{2} (x+1)^{-\frac{1}{2}}$

g) $f(x) = -4x^3 + 0,5x - \pi$

Summenregel $f'(x) = -12x^2 + 0,5$

h) $f(x) = ex^5 + (x^2 + 2x)^4$

Summen-&Kettenregel

$$f'(x) = 5ex^4 + 4 \underbrace{(x^2 + 2x)^3}_{v'(u(x))} \cdot \underbrace{(2x + 2)}_{u'(x)} = 8x^7 + 56x^6 + 144x^5 + 5x^4(e + 32) + 64x^3$$

i) $f(x) = \frac{1+3x}{1-2x}$

Quotientenregel $f'(x) = \frac{3 \cdot (1-2x) - (1+3x) \cdot (-2)}{(1-2x)^2} = \frac{5}{(1-2x)^2}$

j) $k(s) = \frac{2}{as^2}$

$k(s) = 2 \cdot (as^2)^{-1}$

\Rightarrow Kettenregel $k'(s) = -2(as^2)^{-2} \cdot (2as) = -\frac{2(2as)}{(as^2)^2} = -\frac{4}{as^3}$

k) $f(u) = 4\sqrt{x^3 + 5x^2}$

$f(u) = 4(x^3 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}$

\Rightarrow Kettenregel $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} (x^3 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 10x) = \frac{6x + 20}{\sqrt{x^3 + 5x^2}}$

l) $g(t) = \sin \frac{1}{t}$

Kettenregel $g'(t) = \underbrace{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\left(-t^{-2}\right)}_{\text{innere Abl.}}$

m) $g(a) = a^2 + \sqrt{2a} - 4$

$g(a) = a^2 + \underbrace{(2a)^{\frac{1}{2}}}_{\text{Kettenregel}} - 4$

\Rightarrow Summenregel $g'(a) = 2a + \frac{1}{2} (2a)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = 2a + \frac{1}{\sqrt{2a}}$



$$n) f(r) = -5 \left(\frac{2}{3} - 4r \right)^5 \quad \text{Kettenregel} \quad f'(r) = \underbrace{-5 \cdot 5 \left(\frac{2}{3} - 4r \right)^4}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{(-4)}_{\text{innere Abl.}} = 100 \left(\frac{2}{3} - 4r \right)^4$$

$$o) f(x) = \sqrt[5]{x^7} + \sqrt{\frac{1}{x}} \cdot (x+1) \quad \text{Summen-\&Produktregel} \quad f(x) = \underbrace{x^{\frac{7}{5}}}_{u(x)} + \underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{v(x)} \cdot (x+1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot (x+1) + x^{\frac{7}{5}} \cdot 1$$

$$p) f(x) = \frac{1}{6} x^6 - x^2 - \sqrt{2} \quad \text{Differenzregel} \quad f'(x) = x^5 - 2x$$

$$q) f(x) = \frac{8}{x^2 + 2} \quad f(x) = 8 \cdot (x^2 + 2)^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Kettenregel} \quad f'(x) = 8 \cdot \underbrace{(-1)(x^2 + 2)^{-2}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{innere Abl.}} = -\frac{16x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$r) f(z) = -\cos(2z + \pi) \quad \text{Kettenregel} \quad f'(z) = \underbrace{\sin(2z + \pi)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{innere Abl.}} = 2 \sin(2z + \pi)$$

$$s) f(x) = (x-3)^5 + \sqrt{2}x - \frac{4}{5} \quad \text{Summen-\&Kettenregel} \quad f'(x) = 5(x-3)^4 \cdot 1 + \sqrt{2} = 5(x-3)^4 + \sqrt{2}$$

3.2 Kurvendiskussion einer Funktion ohne Parameter

Ableitungen (Anwendung der Produktregel)

$$f(x) = \frac{(x-1)^3 \cdot (3x+5)}{12}$$

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \cdot (3x+5)}{12} + \frac{(x-1)^3 \cdot 3}{12} = \frac{3(x-1)^2}{12} \cdot ((4x+4)) = (x-1)^2 \cdot (x+1)$$

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \cdot (3x+5)}{12} + \frac{(x-1)^3 \cdot 3}{12} = \frac{3(x-1)^2}{12} \cdot ((4x+4)) = (x-1)^2 \cdot (x+1)$$

$$f''(x) = 2(x-1) \cdot (x+1) + (x-1)^2 \cdot 1 = (x-1)(3x+1) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$f'''(x) = 6x - 2$$

Definitionsbereich:

$$x \in \mathbb{R}$$

Symmetrie:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{12}$$

Es liegt keine einfache Symmetrie vor, da gerade und ungerade Exponenten im Term auftreten.
($f(x) \neq f(-x)$ und $-f(x) \neq f(-x)$)

Randverhalten:

$$n=4 \quad \text{und} \quad a_4 > 0$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^3 \cdot (3x+5)}{12} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1/2/3} = 1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_4 = -\frac{5}{3}}}$$

Fit für die Q-Phase ?

Mathematiktraining für die Schüler und Schülerinnen des Beruflichen Gymnasiums Gelnhausen



Extremunkte:

EP: $f'(x)=0 \wedge (f''(x) \neq 0 \vee \text{VZW bei } f')$

$$(x-1)^2 \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \vee x_3 = -1 \text{ mögliche ES}$$

$$f''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow \text{TP}(-1 / -\frac{4}{3})$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f'(2) = 3 \end{array} \right\} \text{kein VZW} \Rightarrow \text{keine Extremstelle bei } x = 1$$

Wendepunkte:

WP: $f''(x)=0 \wedge (f'''(x) \neq 0 \vee \text{VZW bei } f'')$

$$(x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3} \text{ mögliche WS}$$

$$f'''(1) = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{WP} = \text{SP}(1/0)$$

$$f'''(-\frac{1}{3}) = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{WP}(-\frac{1}{3} / -\frac{64}{81})$$

Wertebereich:

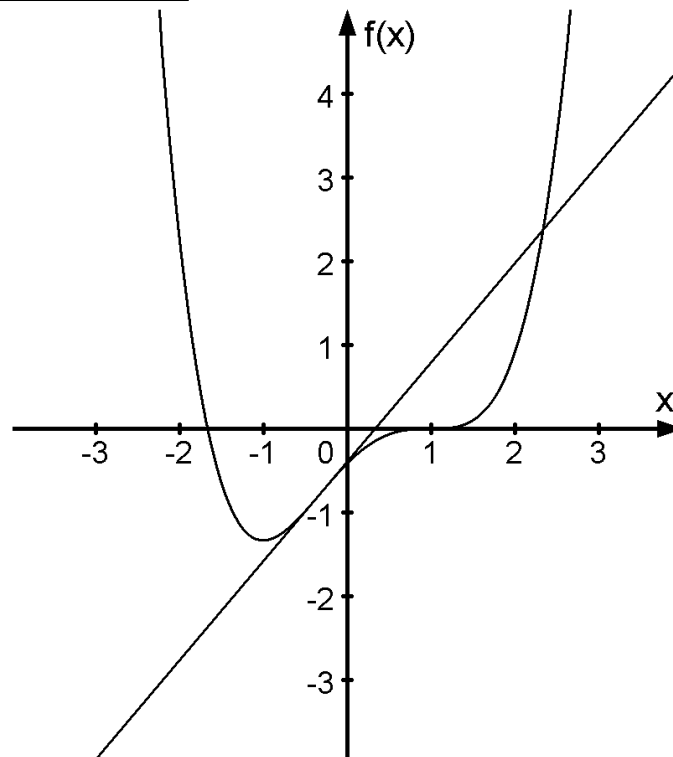
$$y \in \mathbb{R} \text{ mit } y \geq -\frac{4}{3}$$

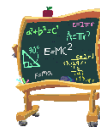
Wendetangenten:

$$\text{SP}(1/0) \Rightarrow t_1(x) = 0$$

$$\text{WP}(-\frac{1}{3} / -\frac{64}{81}) \Rightarrow f''(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27} = m_T \Rightarrow -\frac{64}{81} = \frac{32}{27} \cdot (-\frac{1}{3}) + b \Rightarrow b = -\frac{32}{81}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_1(x) = \frac{32}{27}x - \frac{32}{81}}}$$





3.3 Kurvendiskussion einer Funktion mit Parameter (Kurvenschar)

a)

$$f_t(x) = \frac{1}{4t^2} \cdot (x^4 - 6t^2x^2 + 9t^4) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$f'_t(x) = \frac{1}{4t^2} \cdot (4x^3 - 12t^2x)$$

$$f''_t(x) = \frac{1}{4t^2} \cdot (12x^2 - 12t^2)$$

$$f'''_t(x) = \frac{1}{4t^2} \cdot (24x) = \frac{6x}{t^2}$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 6t^2x^2 + 9t^4) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 6t^2z + 9t^4) = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = 3t^2 \pm \sqrt{9t^4 - 9t^4} = 3t^2$$

$$x_{1/2} = \sqrt{3t^2} = t\sqrt{3} \quad \vee \quad x_{3/4} = -\sqrt{3t^2} = -t\sqrt{3} \quad \text{beide NS sind DNS und damit auch ES}$$

Extrempunkte:

$$\text{EP: } f'_t(x) = 0 \quad \wedge \quad (f''_t(x) \neq 0 \quad \vee \quad \text{VZW bei } f')$$

$$4x^3 - 12t^2x = 0 \quad \vee \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = t\sqrt{3} \quad \vee \quad x_3 = -t\sqrt{3} \quad \text{mögliche ES}$$

$$f''_t(0) = -3 < 0 \Rightarrow \text{HP}(0/2 \frac{1}{4}t^2)$$

$$f''_t(\pm t\sqrt{3}) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{TP}_{1/2}(\pm t\sqrt{3}/0)}}$$

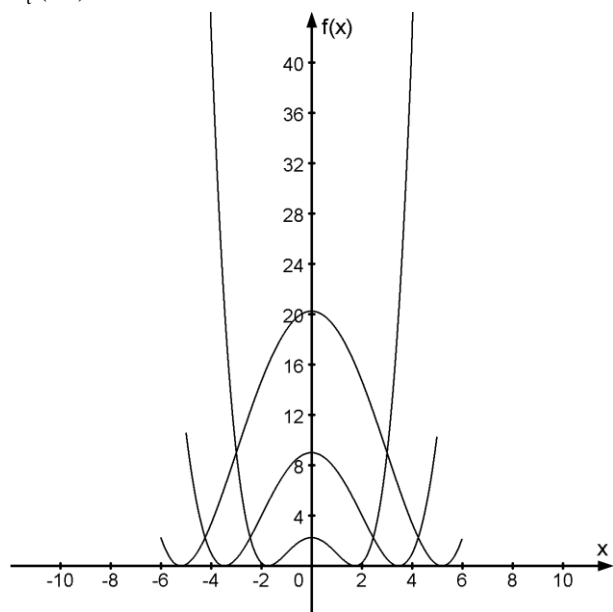
Wendepunkte:

$$\text{WP: } f''_t(x) = 0 \quad \wedge \quad (f'''_t(x) \neq 0 \quad \vee \quad \text{VZW bei } f'')$$

$$12x^2 - 12t^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm t$$

$$f'''_t(-t) = -\frac{6}{t} \neq 0 \quad \text{und} \quad f'''_t(+t) = \frac{6}{t} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{WP}_{1/2}(\pm t/t^2)}}$$

$$f_t(\pm t) = t^2$$



K_3 für $-6 \leq x \leq 6$



b)

$$WP_1(t/t^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \end{array} \right\} \text{ Gleichung der Ortskurve } O(x) = x^2$$

$$WP_2(-t/t^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -t \\ y = t^2 \end{array} \right\} \text{ Gleichung der Ortskurve } O(x) = x^2$$

Alle WP liegen auf der Normalparabel.

c)

$$WP(-t/t^2)$$

$$f'_t(t) = \frac{1}{4t^2} \cdot (4t^3 - 12t^2t) = -2t$$

$$t^2 = -2t \cdot (t) + b \Rightarrow b = 3t^2$$

Wen det angente : $g(x) = -2tx + 3t^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4t^2} \cdot (x^4 - 6t^2x^2 + 9t^4) &= -2tx + 3t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4t^2} \cdot x^4 - \frac{6}{4}x^2 + 2tx - \frac{3}{4}t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 6t^2x^2 + 8t^3x - 3t^4 = 0 \quad x = t \text{ ist mindestens eine DNS} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 0 & -6t^2 & 8t^3 & -3t^4 \\ t & 1 & t & -5t^2 & 3t^3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & t & -5t^2 & 3t^3 \\ t & 1 & 2t & -3t^2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2tx - 3t^2 &= 0 \Leftrightarrow x_3 = -t + \sqrt{4t^2} = t \quad \vee \quad x_4 = -t - \sqrt{4t^2} = -3t \text{ weitere Schnittstelle} \\ g(-3tx) &= -2t(-3t) + 3t^2 = 9t^2 \Rightarrow \text{Schnittpunkt } \underline{\underline{S(-3t/9t^2)}} \end{aligned}$$

d)

$$f_2(x) = \frac{1}{16} \cdot (x^4 - 24x^2 + 144)$$

$$P\left(u / \frac{1}{16} \cdot (u^4 - 24u^2 + 144)\right) \quad Q\left(-u / \frac{1}{16} \cdot (u^4 - 24u^2 + 144)\right)$$

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot \frac{1}{16} \cdot (u^4 - 24u^2 + 144) = \frac{1}{16} u^5 - \frac{3}{2} u^3 + 9u$$

$$A'(u) = \frac{5}{16} u^4 - \frac{9}{2} u^2 + 9$$

$$A''(u) = \frac{5}{4} u^3 - 9u$$

$$EP: A'(x) = 0 \wedge A''(x) < 0$$

$$\frac{5}{16} u^4 - \frac{9}{2} u^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \pm\sqrt{12} \quad \vee \quad u_2 = \pm\sqrt{2,4} \text{ mögliche ES}$$

$$A''(\sqrt{12}) = 20,78 > 0 \Rightarrow TP$$

$$A''(\sqrt{2,4}) = -9,29 < 0 \Rightarrow HP(2,4/8,92)$$

Maximaler Flächeninhalt 8,92 FE.